# 四庫全書

子部

# 數學九章卷三上

宋 張九韶 撰

## 田域

按此卷以方圓斜直冪積相求即方田少廣勾股諸法而術中累乘累除錯綜變換與常法迴然其本則出於立天元一法今擇其難解者以立天元一法明之皆不攻自破矣

### 古池推元

問有方中古圓池堙圯北餘一角從外方隅斜至内圓邊七尺六寸欲就古跡修之欲求圓方方斜各幾何

荅曰池圓徑三丈六尺六寸四百二十九分寸之四百一十二

方面三丈六尺六寸四百二十九分寸之四百一十二　方斜五丈一尺八寸四百二十九分寸之四百一十二

術曰以少廣求之投胎術（按即益積之名）入之斜自乘倍之

為實倍斜為益方以半寸為從隅開投胎平方得徑又為方面以隅併之共為方斜

草曰以斜七十六寸自乘得五千七百七十六倍之得一萬一千五百五十二寸為實倍斜七十六寸得一百五十二為益方按有長方積先求長其長闊較名益方以半寸為從隅開平方置實一萬一千五百五十二於上益方一百五十二於中從隅五分於下於下起步約得百乃於實上商置三百寸方

古池圖

方隅斜之圖

弦丈尺寸

再進為一萬五千二百按再進者以百乘之也隅五進為五千按隅五分以百再乘得五千以商隅相生得一萬五千為正方以消益方一萬五千二百其益方餘二百以與商相生得六百投入實得一萬二千一百五十二又商隅相

生又得正方一萬五千内消負方二百訖餘一萬四千八百為從方按倍正方減益方之數一退為一千四百八十以隅再退為五十乃于上商之次續商置六十寸與隅相生增入正方得一千七百八十乃命續商除實訖實餘一千四百七十四次以商生隅增入正方為二千八十方一退為二百八隅再退為五分乃於續商之次又商置六寸與隅相生增入正方為二百一十一乃命商除實訖實不盡二百六寸不開為分子

乃以商生隅增入正方又併隅共得二百一十四寸

五分為分母以分母分子求等得五分為等數皆以

五分約其分母分子之數為四百二十九分寸之四

百一千二通命之得池圓徑及方面皆三丈六尺六

寸四百二十九分寸之四百一十二又倍隅斜七尺

六十得一丈五尺二寸併徑三丈六尺六寸共得五

丈一尺八寸四百二十九分寸之四百一十二為方

斜

按此術以立天元一法明之法立天元一為池徑即方邊自之得一平方為方冪倍之得二平方為斜冪寄左次倍斜至步加天元一得一百五十二寸多一元為方斜自之得二萬三千一百零四寸多三百零四元多一平方亦為斜冪與左相消兩邊各減一平方得二萬三千一百零四寸多三百零四元與一平方等寸數為實元數為較或兩邊各半之得一萬一千五百五

十二寸多一百五十二元多半平方與一平方等寸數為實元數半方數共為較術中所用益次數也然不如前數之便至開方法即有長方積有長濶較帶縱先求長之法也

尖田求積

問有兩尖田一段其尖長不等兩大斜三十九步兩小斜二十五步中廣三十步欲知其積幾何

荅曰曰積八百四十步

術曰以少廣求之翻法入之置半廣自乘為半冪與小斜冪相減相乘為小率以半冪與大斜冪相減相乘為大率以二率相減餘自乘為實併二率倍之為從上廉以一為益隅開翻法三乘方得積一位開盡者不用翻法

尖田圖

草曰置廣三十步以半之得一十五自乘得二百二十五為半冪以小斜二十五步自乘得六百二十五為小斜冪與半冪相減餘四百與半冪二百二十五相乘得九萬步為小率置大斜三十九步自乘得一千五百二十一為大斜冪與半冪二百二十五相減餘一千二百九十六與半冪二百二十五相乘得二十九萬一千六百為大率以小率九萬減大率餘二十萬一千六百自乘得四百六億四千二百五十六

萬為實以小率九萬併大率二十九萬一千六百得三十八萬一千六百倍之得七十六萬三千二百為從上廉按從上廉平方和數也以一為益隅開玲瓏翻法三乘方步法乃以從廉超一位益隅超三位約商得十今再超進乃商置百其從上廉為七十六億三千二百萬其益隅為一億約實置商八百為定商以商生益隅得八億為益下廉又以商生下廉得六十四億為益上廉與從上廉七十六億三千二百萬相消從上

廉餘十二億三千二百萬又與商相生得九十八億五千六百萬爲從方又與商相生得七百八十八億四千八百萬爲正積與元實四百六億四千二百五十六萬相消正積餘三百八十二億五百四十四萬爲正實又以益隅一億與商相生得八億增入益下廉爲一十六億又以益下廉與商相生得一百二十八億爲益上廉乃以益上廉與從上廉一十二億三千二百萬相消餘一百一十五億六千八百萬爲益

上廉又與商相生得九百二十五億四千四百萬為益方與從方九十八億五千六百萬相消益餘八百二十六億八千八百萬為益方又以商生益隅一億得八億增入益下廉得二十四億又以商相生得一百九十二億入益上廉得三百七億六千八百萬為益上廉又以商生益隅一億得八億入益下廉得三十二億畢其益方一退為八十二億六千八百八十萬益上廉再退得三億七百六十八萬益十廉三退

得三百二十萬益隅四退為一萬畢乃約正實續置
置四十步與益隅一萬相生得四萬入益下廉為三
百二十四萬又與商相生得一千二百九十六萬入
益上廉内為三億二千六十四萬又與商相生得一
十二億八千二百五十六萬入從方内為九十五億
五千一百三十六萬乃命上續商四十除實適盡所
得八百四十步為田積今列求率開方圖於後

按此術以立天元一法明之法立天元一為尖

積即大小兩三角積和自之得一平方為和自乘以半廣冪減大斜冪與餘積相乘得二十九萬一千六百步為大三角積自乘以半廣冪減小斜冪與餘數相乘得九萬步為小三角積自乘二自乘數併而倍之內減去和自乘得七十六萬三千二百步少一平方為較自乘與和自乘再相乘得七十六萬三千二百平方少一三乘方寄左次以大小兩三角積相減餘二十萬零一千六百步為和

較相乘數自之得四百零六億四千二百五十六萬步與左相等則後步數為實前平方數為從上廉三乘方數即益隅與草中所取之數悉合

又按此苦以小率九萬步開平方得三百步即小三角積以大率二十九萬一千六百步開平方得五百四十步即大三角積併之得八百四十步即尖積其法甚易然必如此費筭者殆欲用立天元一法不求分積即得所問之總積也

30 廣步
半之
15 半廣
自乘
225 半冪
25 小斜
自乘
625 小斜冪

225 半冪
相減
625 小斜冪
225
相乘
400
90000 小率
39 大斜
自乘

1521 大斜冪
相減
225 半冪
1296 餘
相乘 半冪
291600 大率
291600 大率
相減
90000 小率

201600 餘
自乘為實
201600 餘
40642560000 實（億）
相併
291600 大率
90000 小率
381600 得
倍之為從上廉
2 倍數
763200 從上廉
1 益隅

正負開三乘方圖

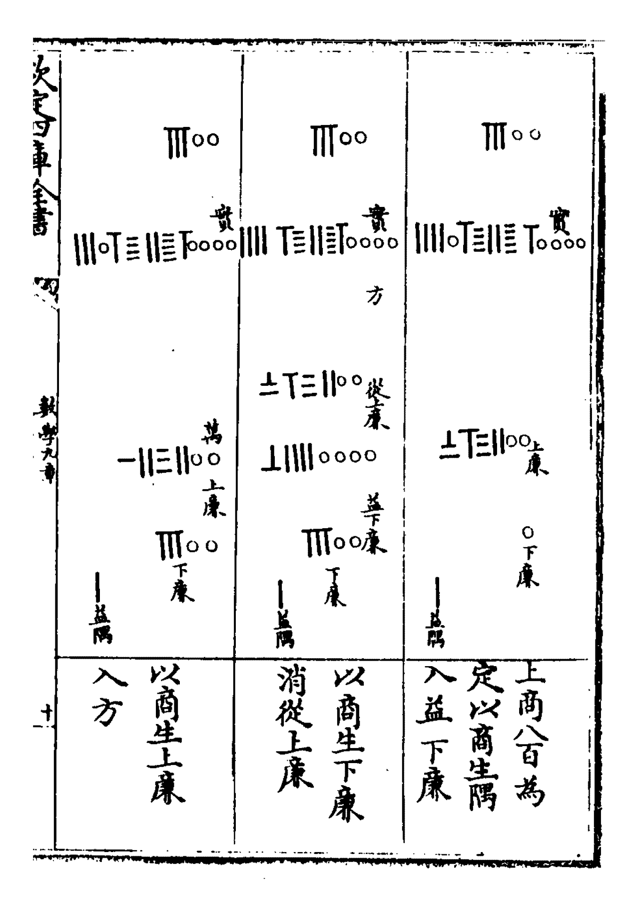
術曰商常爲正　實常爲負　從常爲正　益常爲負

商○　實 ||||○⊤≡||≡⊤○○○○　虛方　復廉 ⊥⊤≡||○○　虛下廉○　益隅 |

上廉超一位　益隅超三位　商數進一位

商○　實 ||||○⊤≡||≡⊤○○○○　上廉 ⊥⊤≡||○○　○下廉　益隅 |

上廉再超一位　益隅再超三位　商數再進一位


實
方
從廉
益下廉
益隅
上廉
下廉
上商八百為定以商生隅入益下廉
以商生下廉消從上廉
以商生上廉入方

實

方

廉

下廉

益隅

以商生方得正積乃與實相減

商

正積

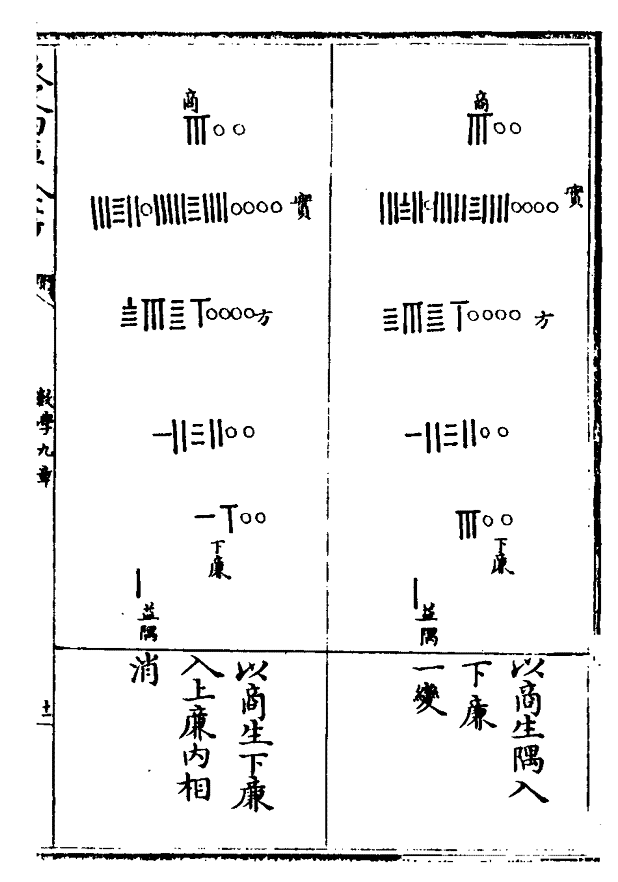
方

廉

下廉

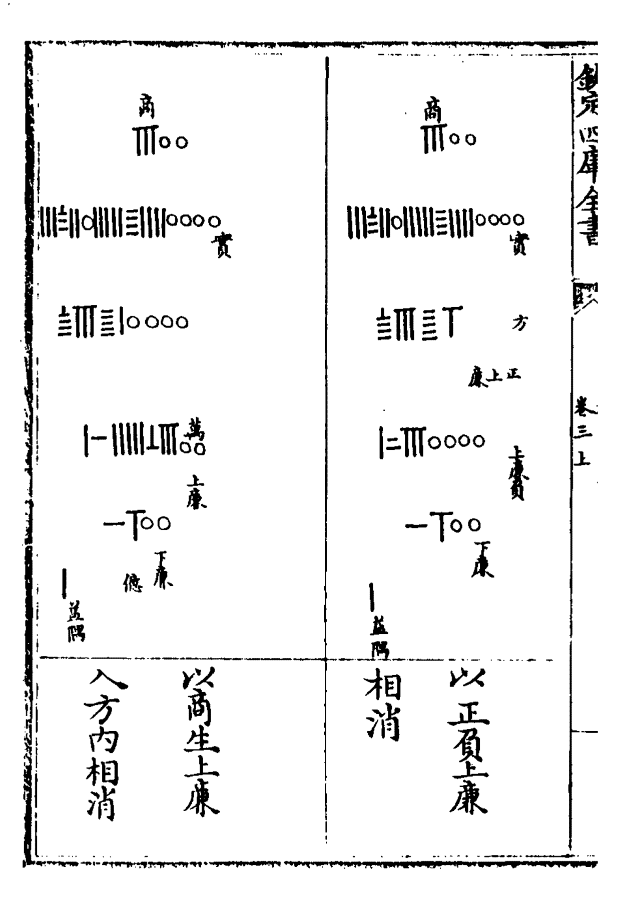
益隅

以負實消正積其積乃有餘為正實謂之換骨




以商生隅入下廉一變

以商生下廉入上廉內相消


欽定四庫全書
卷三上
商
實
方
正上廉
上廉負
下廉
益隅
以正負上廉相消
商
實
萬
上廉
下廉
益隅
以商生上廉入方內相消

商

實

正方

圓方

上廉

下廉

益隅

以正負方相消

商

實

方

萬上廉

下廉

益隅

以商生隅入下廉

三變

商

實

方

廉

下廉

以商生下廉入上廉

商

實

方

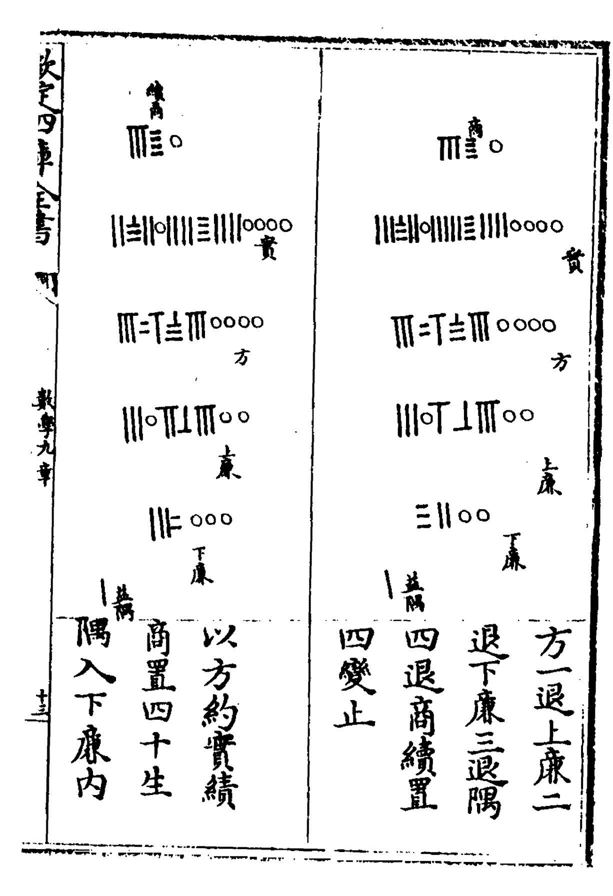
廉

下廉

益隅

以商生隅入下廉

三變




方一退上廉二退下廉三退隅四退商續置四變止

以方約實續商置四十生隅入下廉內

以商生下廉入上廉内

以商生上廉入方内

商

實

方

上廉

下廉

隅

以續商四十命方法除實適盡

商

實空

方

上廉

下廉

隅

所得商數八百四十步是為田積

已上係開三乘方飜法圖後篇效此

三斜求積

問沙田一段有三斜其小斜一十三里中斜一十四里大斜一十五里里法三百步欲知為田幾何

荅曰田積三百一十五頃

術曰以少廣求之以小斜冪併大斜冪減中斜冪餘半之自乘于上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之為實一為從隅開平方得積

草曰以斜一十三里自乘得一百六十九里為小斜冪以大斜一十五里自乘得二百二十五里為大斜冪併小斜冪得三百九十四里於上以中斜一十四里自乘得一百九十六里為中斜冪減上餘一百九十八里以半之得九十九里自乘得九千八百一里

小斜一十三里
大斜一十五里
中斜一十四里

於上以小斜冪一百六十九乘大斜冪二百二十五得三萬八千二十五減上餘二萬八千二百二十四以四約之得七千五十六里為實以為一隅開平方以隅超步為一百乃於實上商置八十以商生隅得八百為從方乃命上商除實餘六百五十六又以商生隅入方得數退一位為一百六十隅退二位為一乃於實上續商四里生隅入從方内得一百六十四乃命續商除實適盡所得八十四里為田積其形長

八十四廣一里以里法三百步自乘得九萬步乘八十四里得七百五十六萬步以畝法二百四十除之得三萬一千五百畝又以頃法一百畝約之得三百一十五頃

按此術以立天元一法明之法立天元一為三角積倍之得二元自之得四平方為中長冪乘底冪以大斜為底寄之又以小斜冪與大斜冪相加内減中斜冪得一百九十八里半之得九

十九里為小分底與底相乘長冪自之得九千八百零一里為小分底冪乘底冪之數又以小斜冪大斜冪相乘得三萬八千零二十五里為小分底冪乘底冪中長冪乘底冪各一內減小分底冪乘底冪之數餘二萬八千二百二十四里為中長冪乘底冪之數與寄數等兩邊各以四約之得七千零五十六里與一平方等里數為實方數即從隅也從二題同此

斜蕩求積

問有蕩一所正北濶一十七里自南尖穿徑中長二十四里東南斜二十里東北斜一十五里西斜二十六里欲知畝積幾何

荅曰蕩積一千九百一十一頃六十畝

術曰以少廣求之置中長乘北濶半之為寄以中長冪減西斜冪餘為實以一為隅開平方得數減北濶餘自乘併中長冪共為内率以小斜冪併率減中斜

斜蕩圖



冪餘半之自乘於上以小斜冪乘率減上餘四約之為實以一為隅開平方得數加寄共為蕩積

草曰以中長二十四里乘北濶一十七里得四百八乃半之得二百四里為寄以中長自乘得五百

七十六為長冪以西斜二十六里自乘得六百七十六為大斜冪以減長冪餘一百里為實開平方得一十里以減北濶數一十七里餘七里自乘得四十九里併長冪五百七十六得六百二十五為内率次置東小斜一十五里自乘得二百二十五為小斜冪又置東南中斜二十里自乘得四百為中冪却以小斜冪併率得八百五十以減中冪四百餘四百五十乃半之得二百二十五自乘得五萬六百二十五里于

上又以小斜羃二百二十五乘率六百二十五得一十四萬六百二十五減上餘九萬里以四約得二萬二千五百為實開平方得一百五十併寄二百四里得三百五十四里為泛以里法三百六十自乘得一十二萬九千六百步乘泛得四千五百八十七萬八千四百步以畝法二百四十步約之得一千九百一十一頃六十畝為蕩積

計地容民

問沙洲一段形如梓刀廣一千九百二十步從三十六百步大斜二千五百步小斜一千八百二十步以安集民每户給一十五畝欲知地積容民幾何

荅曰池積一百四十九頃九十五畝　容民九百九十九户　餘地一十畝

術曰以少廣求之置廣乘長半之為寄以廣冪併從冪為中冪按實大斜冪以小斜冪併中冪減大斜冪按實中斜冪餘半之自乘于上以小斜冪乘中冪減上餘以四

約之為實以一為隅開平方得數加寄共為積以每戶給數除積得容民戶數

沙洲圖

從三十六百步
大斜二千五百步
小斜一千八百二十步
廣四千九百二十步

草曰置廣一千九百二十步乘從三千六百步得六百九十一萬二千步乃半之得三百四十五萬六千步為寄以廣自乘得三百六十八萬六千四百步為

廣冪又以從自乘得一千二百九十六萬步為從冪併廣冪得一千六百六十四萬六千四百步為中冪次以小斜一千八百二十步自乘得三百三十一萬二千四百步為小斜冪又以大斜二千五百步自乘得六百二十五萬步為大斜冪卻以小斜冪併中冪得一千九百九十五萬八千八百步以大斜冪減之餘一千三百七十萬八千八百步乃半之得六百八十五萬四千四百步自乘得四十六萬九千八百二

十七億九千九百三十六萬步於上次以小斜冪乘中冪得五十五萬一千三百九十五億三千五百三十六萬步減上餘八萬一千五百六十七億三千六百萬為實以四約之得二萬三百九十一億八千四百萬為實以一為隅開平方得一十四萬二千八百步併寄三百四十五萬六千步共得三百五十九萬八千八百步以畝法二百四十步除之得一萬四千九百九十五畝次以頃法一百畝約之為一百四十

九頃九十五畝為地積又為實以每戶所給一十五畝為法除實得九百九十九戶不盡一十畝不及一戶所給數以為餘地一十畝

蕉田求積

問蕉葉田一段中長五百七十六步中廣三十四步不知其周求積畝合幾何

答曰田積四十五畝一角十一步六萬三千七十分步之五千二百一十三

按六十步為一角蓋四分畝之一也

術曰以長併廣再自乘又十乘之爲實半廣半長各自乘所得相減餘爲從方一爲從隅開平方半之得積

蕉葉田

中長五百七十六步

中廣三十四步

草曰以長五百七十六步併廣三十四步得六百一十兩度自乘按即自乘再乘得二億二千六百九十八萬一

千步進一位即是以十乘之得二十二億六千九百八十一萬步定得此數以為實置長五百七十六以半之得二百八十八自乘得八萬二千九百四十四於上又置廣三十四步以半之得一十七自乘得二百八十九減上餘八萬二千六百五十五為從方以一為從隅開平方得二萬一千七百四十二步不盡一萬四百二十六步以商生隅入方又併隅莫共得一十二萬六千一百四十為母與不盡及開方田積

數皆半之田積定得一萬八百七十一步六萬三千七十分步之五千二百一十三以畝法二百四十約之得四十五畝一角一十一步六萬三千七十分步之五千二百一十三

按此術以長與廣相加自乘再乘又以十乘之為長方積以半長自乘半廣自乘相減為長濶較求得闊折半為田積非法也此題中廣甚小故得數較古法多七百餘較密法少二千七百

餘若設長為七百零七廣為二百九十三亦以此法求之長廣相加自之再之又十乘之得一百億為實半長半廣各自之相減得十萬零三千五百為長闊較求得闊折半得三萬零四百二十六步餘為田積依密法求之實十四萬四千九百餘步所差甚遠其術之不合顯然矣蓋數必三乘而後可以平方求之今再乘之後僅以十進之宜其不可用也

漂田堆積

問三斜田被水衝去一隅而成四不等直田之狀元中斜一十六步如多長水直五步如少濶殘小斜一十三步如弦殘大斜二十步如元中斜之弦横量徑一十二步如殘田之廣又如元中斜之勾亦是水直之股欲求元積殘積水積元大斜元中斜二水斜各幾何

答曰元積一百三十八步一十一分步之八

水積一十二步一十一分步一八按應一十三步一十一分步之七

殘積一百二十六步

元大斜二十九步一十一分步之一

元小斜一十八步一十一分步之一按應一十一分步之十

水大斜九步一十一分步之一

水小斜五步一十一分步之一按應一十一分步之一

術曰以少廣求之連枝入之又勾股入之置水直減

中斜餘為法以中斜乘大殘為大斜實以法除實得元大殘以殘大斜減之餘為水大斜以法乘徑又自之為小斜隅以水直冪併徑冪為弦冪又乘徑冪又乘中斜冪為小斜實與隅可約約之閉連枝平方得元小斜以殘小斜減之餘為水小斜以水直乘之為水實倍水小母為法除之得水積按此處法跡以水直併中斜乘徑為實以二為法除之得殘積以殘積併水積共為元積分者通之重有者重通之

漂田圖

草曰以水直五減中斜一十六餘一十一為法以中斜一十六乘大殘二十得三百二十為大斜實以法除之得二十九步一十一分步之一為元大斜內減殘大斜二十步餘九步一十一分步之一為水大斜以法一十一乘徑一

十二按乘徑可省得一百三十二自之得一萬七十四百二十四為小斜隅以水直五自乘得二十五為水直冪以徑一十二自之得一百四十四為徑冪併水直冪得一百六十九為弦冪以乘徑冪按此乘徑冪亦可省葢以此乘復以此除徒為多筭耳一百四十四得二萬四千三百三十六於上又以中斜一十六自乘得二百五十六為中斜冪以乘上得六百二十三萬一十六為小斜實開平方與隅求等得一百四十四俱約之實得四萬三千二

百六十四隅得一百二十一開方不盡以連枝術入之用隅一百二十一乘實四萬三千二百六十四得五百二十三萬四千九百四十四為定實以一為定隅開平方得二千二百八十八為實以約隅一百二十一除之得一十八步不盡一百一十一（按一百一十一整）與法一百二十一俱以一十一約之得一十一分步之十為元小斜減殘小斜一十三步餘五步一十一分步之一（按十訛一故下數誤）為水小斜通步內子得五十六以

水直五步乘之得二百八十為水實倍水小毋一十一得二十二為法除之得一十二步不盡一十六與法俱以二約之為一十二步一十一分步之八按應一十三步一十一分步之七　水積置中斜一十六併水直五得二十一乘徑一十二得二百五十二以半之得一百二十六為殘積以水併積共得一百三十八步一十一分步之八為元積按應一百三十九步一十一分步之七

數學九章卷三上

欽定四庫全書

子部

數學九章卷三下 四上

詳校官欽天監博士臣古之雄

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官候補中允臣王燕緒

校對官編修臣孫希旦

謄錄監生臣張龍圻

數學九章卷三下　　宋　秦九韶　撰

田域

環田三積

問環田大小圓田共三段環田外周三十步虛徑八步大圓田徑一十步小圓田周三十步欲知三田積及環田周通實徑大圓周小圓徑各幾何

答曰環田積二十步二百三十六萬二千二百五

十六分步之一百二十九萬八千二十五

通徑九步一十九分步之九　實徑一步一十九分步之九　内周二十五步一十七分步之五

大圓田積七十九步五十三分步之三　周三十一步二十一分步之十三

小圓田積七十一步二百八十六分步之四十三　徑九步一十九分步之九

術曰以方田及少廣率變求之各置圓環徑自乘為冪進位為實以一為隅開平方得周各置環圓周自乘為冪退位為實以一為隅開平方得徑以周冪或徑冪乘各實以一十六約之為實以一為隅開平方得圓積置環周冪乘徑實十六約之為大率置虛徑冪乘內周實十六約之為小率以二率相減之餘以自乘為實併二率倍之為從上廉一為益隅開三乘方得環積置環周自乘退位為實一為隅開平方得

通徑以虛徑減通徑餘為實徑其有開不盡者約而命之

草曰置大圓徑一十步自乘得一百為徑冪進位得一千為實以一為隅開平方得三十一步不盡三十

九為分子乃以隅生方又益隅共得六十三為分母以分子與母求等得三俱以三約之母子得二十一分步之一十三為大圓周三十一步二十一分步之一十三次以徑冪一百乘前實一千得一十萬以十六約之得六千二百五十為實以一為隅開平方得七十九步不盡九為分子乃以隅生方又增隅得一百五十九為分母以分子母求等得三俱以三約母子得五十三分步之三為大圓積七十九步五十三

分步之三次置小圓田周三十步自乘得九百為周冪退位得九十為徑實以一為隅開平方得九步不盡九以隅生方又益隅得一十九步之九為小圓徑九步一十九分步之九次以周冪九百乘前實九十得八萬一千以十六約之得五千六十二步五分為實以一為隅開平方得七十一步有不盡數二十一步五分為子以隅生方又益隅得一百四十三為分母以分子母求等得五分俱約之得二百八十六分

步之四十三為積次置環田周三十步自乘得九百為周冪退位得九十為實以一為隅開平方得九步不盡九為分子以隅生方併隅得一十九為分母直命之為環田通徑九步一十九分步之九次以環周冪九百乘環實九十得八萬一千以十六約之得五千六十二步五分為大率次置環田虛徑八步自乘得六十四為虛冪進位得六百四十為實以一為隅開平方得二十五步不盡一十五為分子以隅生方

又併隅得五十一為分母與子求等得三俱約之得一十七分步之五為環田內周二十五步一十七分步之五次以虛冪六十四乘周實六百四十得四萬九百六十以十六約之得二千五百六十為小率以小率減大率餘二千五百二步五分自乘得六百二十六萬二千五百六步二分五釐為實以大小二率併之得七千六百二十二步五分倍之得一萬五千二百四十五為從上廉以一為益隅開玲瓏三乘方

得二十步不盡三十二萬四千五百六步二分五釐為分子續商無數乃以益隅一益下廉八十併之得八十一為減毋次以從上廉一萬二千八百四十五併從方五十七萬七千八百得五十九萬六百四十五以毋八十一減之餘五十九萬五百六十四為分母以分子求等得二分五釐俱約之得二百三十六萬二千二百五十六分步之一百二十九萬八千二十五為環田積二十步二百三十六萬二千二百五

十六分步之一百二十九萬八千二十五次置環田通徑九步一十九分步之九以虛徑八步減之餘一步一十九分步之九為環田實徑合問

按周徑相求以進位退位為實者蓋以徑一周三有奇徑一自之仍得一周自之略與十等故徑冪升一位為周冪周冪降一位為徑冪以省算亦法之巧者其徑求周較密率約大一百五十七分之一周求徑約小一百五十九分之一

然較古率則已密矣其周冪徑冪相乘十六約之開平方得圓積者蓋周徑相乘四歸得圓積徑自乘為方積故四歸亦展為自乘十六之數約之得四分徑之冪乘周冪之數故開方得圓積至求環積與前求尖田積同但彼立天元一為兩積之和此立天元一為兩積之較耳其式如左

法立天元一為環田積即內外兩圓積之較自

之得一平方為較自乘以大小率即二圓積各自乘併而倍之得一萬五千二百四十五步内減較自乘得一萬五千二百四十五步少一平方為和自乘與較自乘再相乘得一萬五千二百四十五平方少一三乘方寄之次以大小率相減餘二千五百零二步五分為和較相乘再自之得六百二十六萬二千五百零六步二分五釐與寄數等即為實寄數内平方數即從上廉三乘方數即益隅

三○

Ⅲ

一○

三○

此圖照問列位以後照草運算

乃先置次大徑以上副自乘得中以中進位為次

實以一為下隅

一○

一○

|○

一○○○

|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 〇 | 三 〇 | 三\| | 三\| |
| 一〇〇〇 | \|〇〇 | \|〇〇 | 三\|\|\|\|〇 |
| 〇 | 三 | ⊥\| | ⊥\|\| |
| \| | \| | \| | \| |
| 三 〇 | 三 | 三\| | 三\| |
| 一〇〇 | \|〇〇 | 三\|\|\|\| | 三\|\|\|\| |
| 三 | ⊥ | ⊥\| | ⊥\|\|\| |
| \| | \| | \| | \|\|\| |

三|
一|||
二|

凡九變至此得大圓徑次求大圓積

〇〇
一〇〇〇
|〇〇〇〇〇
一一
⊥||三〇

上副自乘得中以次約之得下為實

⊥||三〇
〇
|

=〇
一||三〇
⊥
=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 𝍯𝍨 | 𝍯𝍨 | 𝍯〇 | 𝍯〇 |
| 𝍨 | 𝍨 | 𝍩𝍢𝍭〇 | 𝍩𝍢𝍭〇 |
| 𝍠𝍭𝍨 | 𝍠𝍭𝍣 | 𝍠𝍬〇 | 𝍦〇 |
| 〇 | 𝍠 | 𝍠 | 𝍠 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 𝍯𝍨 | 𝍯𝍨 | 𝍯𝍨 | 𝍯〇 |
| 𝍨 | 𝍨 | 𝍩𝍢𝍭〇 | 𝍩𝍢𝍭〇 |
| 𝍠𝍭𝍨 | 𝍠𝍭𝍧 | 𝍠𝍬𝍨 | 𝍩𝍣〇 |
| 𝍢 | 𝍠 | 𝍠 | 𝍠 |

凡十一變至此得大圓積次求小圓徑



凡七變至此得小圓徑次求小圓積

一十一變得小圓積次求環田通徑當求環田通徑蓋環田之外周三十步與小圓田外周同

則不遇與前七變諸圖一理茲不復繁乃求實

徑

|  |  |  |
|---|---|---|
| 〣○‖〣 | 二○ | 二○ |
| ╥ | ╤〣○ | ‖〣○ |
| ╥ | ‖○ | ‖‖○ |
|  | ｜ | ｜ |
| ⊥‖‖ | 二 | 二○ |
| ╤〣○ | ‖〣○ | ‖〣 |
| ｜ | ‖○ | 〣○ |
|  | ｜ | ｜ |

凡九變得環田內周次求環積

只此小率與前大率兩者求實徑二率相乘減得餘以餘自乘得後實併二率為得數倍得數為從上廉以一為益隅

○

T=T=||||○T=||||

○

|≡||≡||||

○

|

從上廉超二位益隅超三位

○

T=T=|||||○T=|||||

○

|≡||≡|||||

○

|

乃商置二十步

二○

T=T=||||○T=|||||

○

|≡||≡|||||

○○

|

以商生隅入下廉

---

二○

T=T=||||○T=|||||

○

|≡||≡|||||

||○

|

以下廉生負廉

二〇

T=T=||||〇T=||||

〇

|||||||||||

||||〇〇

||〇

|

以負廉與正廉相消得正上廉

二〇

T=T=||||〇T=||||

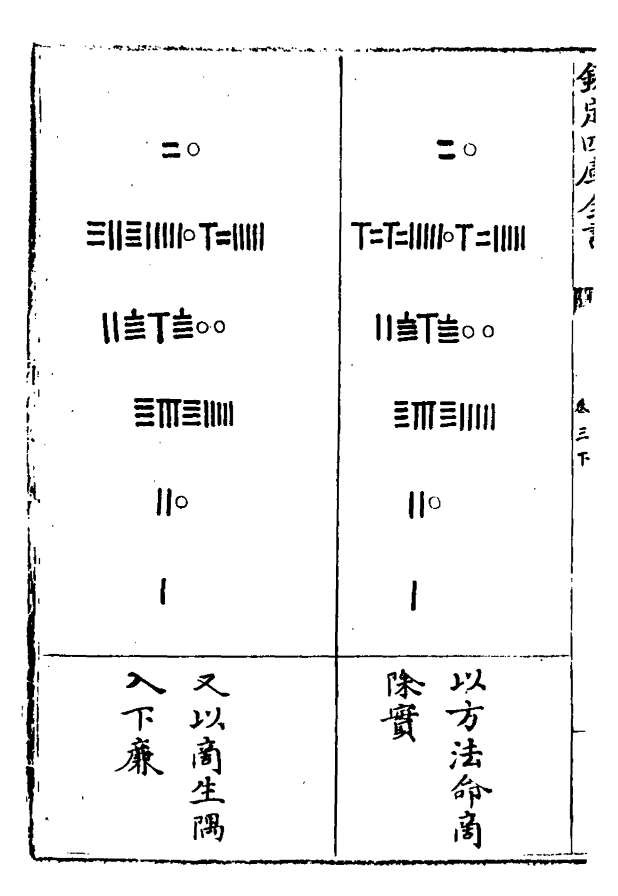
〇

|☰Ⅲ☰||||

||〇

|

以商與上廉生方



以方法命商除實

又以商生隅入下廉

以下廉與商生負上廉得數

負上廉與正廉相消

𝍪〇

𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍤

𝍡𝍫𝍥𝍰〇〇

𝍠𝍫〇𝍫𝍣

𝍣〇

𝍠

商與上廉生方

𝍪〇

𝍫𝍡𝍫𝍣〇𝍥𝍪𝍤

𝍫𝍦𝍮𝍧〇〇

𝍠𝍫〇𝍫𝍤

𝍣〇

𝍠

商隅又相生入下廉

二〇

三||三||||〇T二||||

||||丄Ⅲ亖〇〇

|三〇三||||

T〇

|

商又與下廉生負廉

二〇

三||三||||〇T二||||

||||丄Ⅲ亖〇〇

|三 三||||

-||〇〇

T〇

|

負廉與正廉相消

商又與隅生
入下廉
方一退上廉

再退下廉三
退隅四退
無商以上廉

併入方隅併
下廉

益隅併負廉與正方廉相消命為母

求等約之

得數

=○

|=Ⅲ≟○=||||

||≡T=||≣T

開三乘方凡二十變至此得環田積數

求實徑但以虛徑減通徑餘一步一十九分步之九

為環田實徑

均分梯田

問户業田一段若梯之狀南廣小三十四步北廣大五

十二步正長一百五十步合係兄弟三人均分其田
邉道各欲出入其地形難分經官乞分南甲乙北內
欲知其田共積各人合得田數及各段正長大小廣
幾何

答曰田共積二十六畆二百一十步

甲得八畆三南五十步　小廣三十四步係

元南廣　大廣四十步五萬八千七百九分

步之五萬二千二百八十四大約百分步之

八十九　正長五十七步二千四十五分步之　百五十三大約一百分步之四十一分

乙得八畝三角五十步　小廣同甲大廣大廣四十六步八萬四千八百二十六億八千九百五十七萬二千六百五十一分步之六萬五千八百七十四億五千四百八十二萬五千二百八十三計大率約百分步之七十七分半強　正長四十九步四億一千

二百四十萬六千二百九分步之二千二十七萬六千三百一十九大約百分步之四分

九釐

丙得八畆三角五十步　小廣同乙大廣大廣五十二步係元北廣　正長四十三步

八千四百三十三億七千九十萬一千九百五分步之四千四百八十八億八千六百二萬九千四十六大約百分步之五十三分強

術曰以少廣及從法求之併兩廣乘長得數以分田人數約之為通率半之為各積以長乘各積為共實以長乘南廣為甲從方二廣差半之為共隅開連枝平方得甲截長以甲長除通率得數減小廣餘為甲廣即為乙小廣以元長乘乙小廣為乙從方置共隅共實開連枝平方得乙截長以乙長除通率得數減乙小廣餘為乙大廣即為丙小廣併甲乙長減元長餘為丙長以元大廣為丙大廣各有分者通之

梯田圖

草曰置小廣三十四併大廣五十二得八十六乘長一百五十得一萬二千九百為實以兄弟三人約之得四千三百為通率半之得二千一百五十為各積

以　法二百四十步約之得八畆不盡二百三十步以角法六十步約之得三角五十步是三人各得八畆三角五十步以元長一百五十步乘各積二千一百五十得三十二萬二千五百為共實以長一百五乘小廣三十四得五千一百為甲從方以小廣大廣餘一十八乃半之得九為共隅開連枝平方開方草更不繁具得五十七步不盡三約為二千四十五分步之八百五十三為甲截長乃以分母二千四十五通全步

內子共得一十一萬七千四百一十八為法又以分母乘通率四千三百得八百七十九萬三千五百為實以法除之得七十四步不盡一十萬四千五百六十八與法求等得二俱約之為五萬八千七百九分步之五萬二千二百八十四乃以小廣三十四步於所得全步七十四步內減之餘四十步五萬八千七百九分步之五萬二千二百八十四為甲大廣即為乙小廣今次求乙長乃以分母五萬八千七百九通乙小廣四十步得二

百三十四萬八千三百六十内子五萬二千二百八十四得二百四十萬六百四十四又元長一百五十乘之得三億六千九萬六千六百為乙從方又以分母五萬八千七百九通共實三十二萬二千五百得一百八十九億三千三百六十五萬二千五百為乙實又以分母通共隅九得五十二萬八千三百八十一為乙從隅開連枝平方（不盡不更章）得四十九步不盡二千二十七萬六千三百十九隅併方共得四億一千二百四十萬六千三

百九為母與不盡求等單一不可約乃定為四十九步
四億一千二百四十萬六千三百九分步之二千二十
七萬六千三百一十九為乙截長以乙長母通全步内
子得二百二億二千八百一十八萬五千四百六十為
法以乙長七千七百三十三億四千七百一十二萬八
千七百為實以法除之得八十七步不盡一百三十四
億九千四百九十九萬三千六百八十與法求等得一
百四十俱約之為八十七步一億四千四百四十八萬

七千三十九分步之九千六百三十九萬二千八百一十二為得數乃以乙小廣毋五萬八千七百九乘得數子九千六百三十九萬二千八百一十二得五萬六千五百九十一億二千五百五十九萬九千七百八為泛却以得數毋一億四千四百四十八萬七千三十九分乘乙小廣子五萬二千二百八十四得七萬五千五百四十三億六千三十四萬七千七十六為寄數於上乃以小廣毋五萬八千七百九乘得數毋一億四千四百

四十八萬七千三十九得八萬四千八百二十六億八千九百五十七萬二千六百五十一以寄減泛今不及減乃破全步一為分併泛得八十六步十四萬一千四百一十八億一千五百一十七萬二千三百五十九減去小廣四十步及分餘四十六步八萬四千八百二十六億八千九百五十七萬二千六百五十一分步之六萬五千八百七十四億五千四百八十二萬五千二百八十三為乙大廣亦丙小廣求丙長置甲長五十七步

二千四十五分步之八百五十六乙長四十九步四億一千二百四十萬六千三百九分步之二千二十七萬六千三百一十九以甲乙分母互乘子甲乙分母相乘得甲正長五十七步八千四百三十三億七千九十萬一千九百五分步之三千五百三十億一千九百八十萬五百四億乙正長四十九步八千四百三十三億七千九十萬一千九百五分步之四百一十四億六千五百七萬二千三百五十五併甲乙長及分共長一百六

步三千九百四十四億八千四百八十七萬二千八百五十九分用減元長一百五十步先破一步通分母作八千四百三十三億七千九十萬一千九百五減去甲乙長長餘四十三步八千四百三十三億七千九十萬一千九百五分步之四千四百八十八億八千六百二萬九千四十六為丙正長

按此術以立天元一法明之法立天元一為甲正長南北廣差折半得九以乘天元得九元以

共正長除之得一百五十分天元之九為甲之半廣差與小廣相加得三十四步多一百五十分元之九再以天元乘之得三十四元多一百五十分平方之九即與每人分田二千一百五十步等兩數各以分母一百五十乘之得三十二萬二千五百步與九平方多五千一百元等步數為實元數為從方平方數為隅得甲正長求乙丙長廣同此但多一帶分故其數較繁

數學九章卷三下

數學九章卷四上

宋 秦九韶 撰

測望

按測望之法見於晉劉徽海島算經原名重差其書一卷九題法簡數密此卷本其法而擴充之於古人之意實多所發明然其中謬舛之處較他卷尤甚今悉為正之至術有未合者更設法以附其後焉

望山高遠

問名山去城不知高遠城外平地有木一株高二丈三尺假為前表乃立後表與木齊高相去一百六十四步先退前表三丈九寸次退後表三丈一尺三寸斜望山峯各與其表之端參合人目高五尺里法三百六十步步法五尺欲知山高及遠各幾何

答曰高二十里半零三步五分步之三　遠二十七里三百二十八步五百七十五分步之六

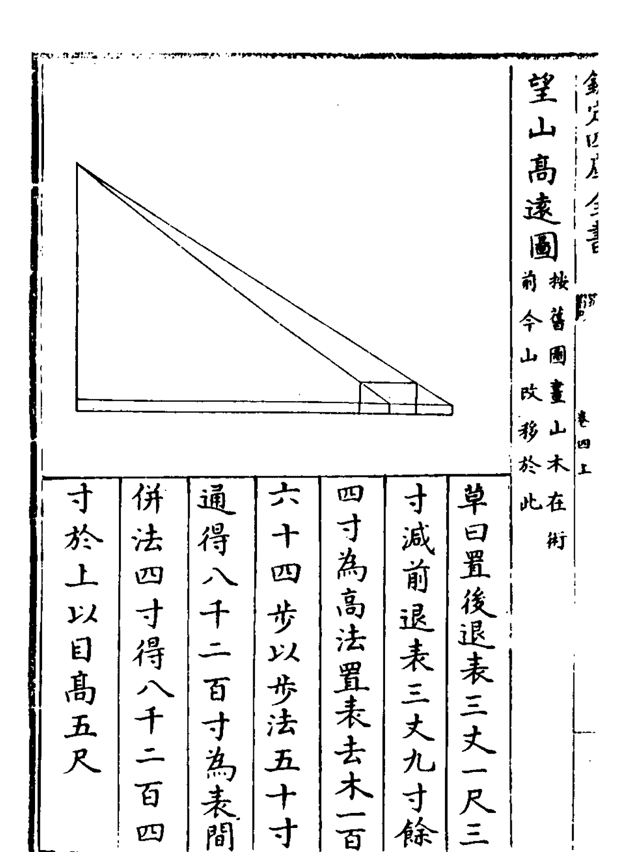
十七

按術數誤後入目距山係三十五里二百三十九步一尺三寸其故詳後

術曰以勾股求之重差入之置二退表相減餘為高法通表間併法於上以目高減表高餘乘上為寔寔如法而一得山高以法乘表高為遠法按此條法誤應以法乘表高與人目去地之較以退後表乘高寔為遠寔寔如法而一得山遠

望山高遠圖

按舊圖畫山木在術前今山改移於此



草曰置後退表三丈一尺三寸減前退表三丈九寸餘四寸為高法置表去木一百六十四步以步法五十寸通得八千二百寸為表間併法四寸得八千二百四寸於上以目高五尺

減表高二丈三尺餘通之為一百八十寸乘上得一百四十七萬六千七百二十寸為高實實如高法四寸而一得三十六萬九千一百八十寸為積寸次以步法五十寸約之得七千三百八十三寸五分步之三次以里法三百六十步約之得二十里一百八十三步五分步之三為山高（按此所得係人目上之山高若加人目高則多一步）

次以法四寸乘表高二丈三尺得九百二十為遠法（按誤同前）以退後表三丈一尺三寸乘高實一百四十七

萬六千七百二十寸得四億六千二百二十一萬三千三百六十寸為遠實實如遠法九百二十寸而一得五十萬二千四百五寸二十三分寸之一十九為積寸乃以步法五十寸乘遠法九百二十得四萬六千寸為法亦除遠實得一萬四十八步不盡五千三百六十與法求等得八十俱以約之得五百七十五分步之六十七又以里法三百六十步約得二十七里三百二十八步五百七十五分步之六十七為山

去後表入立望處等圖如後

按術中求山高法合其求遠以表高乘高法為遠法則誤葢本法應即以高法為遠法以退後表乘表問并法為寔即得後人目距山之遠今以退後表乘高寔為寔而高寔乃目高減表高乘表減併法之數則遠法亦當以目高減表高乘高法今即以表高乘之則法數大故得數小也

乃以頭位八千二百四寸乘中一百八十寸得一百四十七萬六千七百二十寸為高寔

𝍢𝍩𝍢

𝍠𝍫𝍦𝍮𝍦𝍪〇

𝍣𝍮𝍠𝍫𝍠𝍫𝍡𝍮〇

𝍣𝍮𝍠𝍪𝍠𝍫𝍡𝍮〇

𝍧𝍪〇

𝍭〇𝍪𝍢〇𝍣

𝍭〇

𝍧𝍪〇

𝍣𝍮〇〇〇

乃以步法五十寸乘中位遠法九百二十寸得下位

四萬六千寸為後圖中位步寸法

|||⊥⊦≡||||⊥○

||||⊥○○○

|○○≡Ⅲ

≡|||⊥○

||||⊥○○○

|○○≡Ⅲ

|||⊥○

||⊥

||||⊥̄ ||||

⊥ Ⅱ

乃以中除上得下位里數及零步其不盡寸與法求得八十俱約之為步分母子之數

臨臺測水

問臨水城臺立高三丈其上架樓其下址側脚闊二尺護岸排沙下橋去址一丈二尺外樁露土高五尺與址下平遇水漲時浸至址令水退不知多少人從樓上欄杆腰中駕一竿出外斜望水際得四尺一寸五分乃與竿端參合人目高五尺欲知水退立深涸岸

斜長自臺址至水際各幾何

按算題固不厭其難然必簡而不漏繁而不贅始為合作如此題本意謂竿端與臺址上下懸直則側脚闊二尺句已贅又不明言人目距臺邊遠近皆故為黷黜也

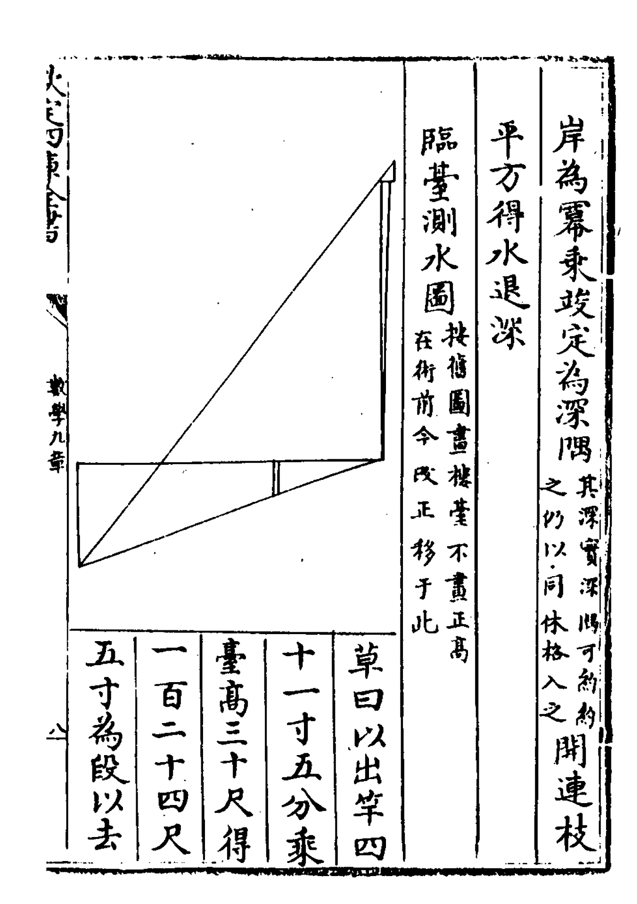
術曰以勾股變法兼少廣求之求泂岸斜長置出竿乘臺高為叚以去基乘叚為闊泛以岸高乘叚為淺泛以目高乘去基為約泛三泛可約者約之為定率

不可約徑為率以闊率自乘為闊冪以淺率自乘為淺冪併闊淺二冪共為竣冪復乘闊冪於上以臺高冪乘上為竣實次以闊率乘淺率為寄以臺高數乘闊率又乘約率得數内減寄餘自乘為竣隅驗峻實峻隅兩者可約求等約之為峻定實峻定隅開同休連枝平方得峻岸斜長同休格先以隅開平方得數名同隅以同隅乘定實開之得數為寔以同隅為法除之得竣斜　按此條誤草中乃即以定實開平方得數以同隅除之為竣斜也

求水退深基岸高冪乘竣定實為深實以去岸冪併

岸為冪乘政定為深隅其深實深隅可約約之仍以同休格入之開連枝平方得水退深

臨臺測水圖按舊圖畫樓臺不畫正高在術前今改正移于此



草曰以出竿四十一寸五分乘臺高三十尺得一百二十四尺五寸為段以去

址一十二尺乘段得一千四百九十四以為闊泛以
護岸高五尺乘段一百二十四尺五寸得六百二十
二尺五寸為淺泛以目高五尺乘去址一十二尺得
六十尺為約泛以闊泛淺約泛三者求等等得一尺
五寸皆以約其闊泛得九百九十六尺為闊率其淺
泛得四百一十五尺為淺率其約泛得四十尺為約
率以闊率九百九十六自乘得九十九萬二千一十
六尺為闊冪以淺率四百一十五自乘得一十七萬

二千二百二十五尺為淺冪併闊淺二冪得一百一十六萬四千二百四十一為䟽冪以闊冪九十九萬二千一十六尺乘䟽冪得一萬一千五百四十九億四千五百六十九萬九千八百五十六尺於上又以臺高三十尺自乘得九百尺為臺高冪乘上得一千三十九萬四千五百一十一億二千九百八十七萬四百尺為䟽實次以闊率九百九十六乘淺率四百一十五得四十一萬三千三百四十尺為寄以臺高三

十乘闊率九百九十六得二萬九千八百八十丈乘約率四十得一百一十九萬五千二百內減寄餘七十八萬一千八百六十尺自乘得六千一百一十三億五百五萬九十六百尺為隅以隅與竣實求等得二千四百八十萬四百俱以約之得四千一百九十一萬二千六百七十六尺為竣定實得二萬四千六百四十九為竣定隅開同休連枝平方得竣岸至水際斜長驗同休格乃以定隅二萬四千六百四十九

萬為實先以一為隅開平方得一百五十七為同休
法次以竝定實四千一百九十一萬二千六百七十
六尺為實亦以一為隅開平方得六千四百七十四
尺為同休實實如同休法一百五十七而一求等得
一俱以一各約之其法與餘只得此數乃頁命之得
四丈一尺一百五十七分尺之三十七為涸岸斜長
至水際求退水深置岸高五尺自乘得二十五為岸
高冪乘竝定實四千一百九十一萬二千六百七十

六尺得一十億四千七百八十一萬六千九百為深
泛以去岸一十二尺自乘得一百四十四尺為去岸
冪併岸高冪二十五尺得一百六十九尺以乘竝定
隅二萬四千六百四十九得四百一十六萬五千六
百八十一為隅泛置二泛求等得一百六十九俱約
二泛得六百二十萬一百為定實得二萬四千六百
四十九為深定隅開連枝平方得水退立深驗同休
格乃以深定隅二萬四千六百四十九為實先以一

為隅開平方得一百五十七為同休法次以深實實六百二十萬一百為實亦以一為隅開平方得二千四百九十為同休實實如法一百五十七而一得一十五尺不盡一百三十五與法求等得一俱以一各約法與只得此數乃直命之得一丈五尺一百五十七分尺之一百三十五為水退立深數也

按此條術雖甚繁理數皆極精密非兼通於句股通分之法者不能立也但累乘累除錯綜變

換皆未嘗明言其不能無金鋮不度之疑今繪

圖以之並脩折其乘除各數于後

如圖甲乙為臺正高乙丙為樁去臺址丙丁為岸高乙戊為臺址至水際即為峻斜已庚為人目高甲庚為出竿戊癸為水面正深題有甲乙臺高乙丙樁去址丙丁去樁甲庚出竿已入庚

目高求乙辛茲斜自丁點與丙甲平行相等作丁辛線自乙點與丙丁並行作甲作乙辛線自丁點與戊甲平行作丁壬點得壬丁辛勾股形內有乙丁辛勾股形一與乙丙丁辛等有乙丁壬三角形一與甲乙戊形同式法當以己庚小股乘庚辛大勾以甲庚小勾除之得壬辛大股次以乙丁三小角形下斜邊乘甲乙戊形直邊以乙辛減壬辛餘壬乙為乙丁壬形直邊為法

除之得乙戊為甲乙戊形下斜邊即所求臺址至水除之峻斜其法只用丨除丙次甚屬易簡即遇數不盡者以通分御之再加一二次乘除可以乃必增至十餘次多者始欲窮數之變就一題以為諸法之例非徒為繁難也試依術内逓次乘除之數逐條細論之

出竿甲庚乘高臺甲乙為段去址乙丙乘段為闊率原名闊泛約之為闊率今即為闊率為去址乘臺高出竿長冪之數闊率自乘

為闊冪即如去址冪乘臺高出竿長冪自乘之數又

即如去址冪乘臺高冪又乘出竿冪之數

岸高丙丁乘段為淺率原名淺泛約之為淺令即淺淺率為岸高乘臺

高出竿長冪之數淺率自乘為淺冪即如岸高冪乘

臺高出竿長冪自乘之數又即如岸高冪乘臺高冪

又乘出竿冪之數

併闊冪淺冪為淺冪為跂冪乙丁冪乘臺高出竿長

冪自乘之數又即如小斜冪乘臺冪又乘出竿竿冪

之數

闊冪峻冪相乘為上數即如小斜冪乘去址冪又乘臺高冪自乘又乘出笇冪自乘之數

闊率淺率相乘為寄數即壬去址岸高相乘又乘臺高冪又乘出笇冪之數

去址目高已庚相乘為約率即如出笇乘壬辛

臺高乘闊率即如去址乘臺高冪又乘出笇之數又以約率乘之即如去址壬辛相乘冪又乘臺高冪又

乘出竿冪之數內減寄數餘去址壬乙相乘冪又乘

臺高冪又乘出竿冪之再自乘之隅數即如壬乙

冪乘去址冪又乘臺高冪自乘又乘出竿冪自乘之

數

上數隅數內去址冪臺高冪自乘出竿冪自乘各數

皆同則用上數乘隅數除即如用小斜冪乘壬乙冪

除實以臺高冪乘上數若以隅數除之即得竝斜乙戊

冪但數不能盡故約之帶隅數開平方所謂連枝同

休法也至闊泛淺用于乘數約泛用于除數故可两邊同約又為省算也求水立深同此

𝍠𝍩𝍣𝍱𝍧𝍱𝍣𝍮𝍧𝍱𝍧𝍬𝍥

𝍬𝍨𝍪〇𝍩𝍥

𝍠𝍩𝍫𝍡𝍫𝍠

𝍢𝍩〇

𝍢　〇

𝍧〇〇

𝍫𝍠𝍪𝍢𝍫〇

𝍫〇

𝍧𝍱𝍥

𝍡𝍰𝍧𝍰〇

𝍣〇

𝍠𝍩𝍧𝍫𝍡〇〇

𝍫𝍠𝍫𝍢𝍫〇

𝍯𝍧𝍩𝍧𝍮〇

𝍯𝍧𝍩𝍧𝍮〇

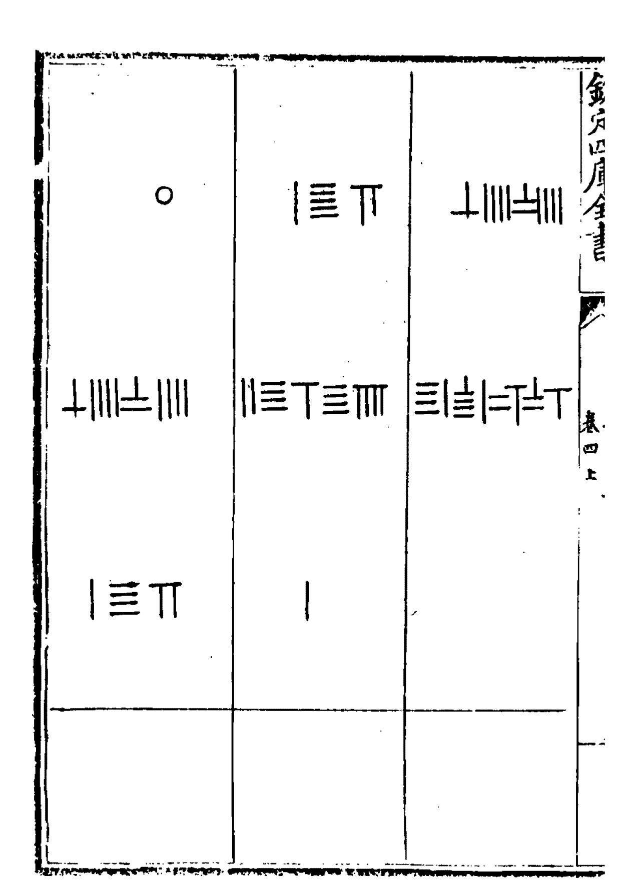
⊥|−|||〇||||〇||||≟T〇〇

−〇=Ⅲ≡||||⊦⊨Ⅲ≟π〇|||〇〇

≣|≟|=T≟T

=||||≟〇〇|||〇〇

||≡T≡Ⅲ



𝍩𝍣
𝍠𝍪𝍣
𝍠𝍪𝍦

𝍩𝍣
𝍠 𝍠𝍪𝍣
𝍠 𝍠𝍪𝍦

𝍩𝍣
𝍠𝍪𝍣
𝍠𝍪𝍦

陟岸測水

問行師遇水須計篾纜搭造浮橋今垂繩量陟岸高山丈人立其上欲測水面六闊以六尺為矩平持去目下五今矩本抵頤遥望水彼岸與矩端岸相合又望水此岸沙際入矩端三尺四寸人目高五尺其水面闊幾何

答曰水闊二十三丈四尺六寸 按應二十三丈八尺

術曰以句股重差求之置短去目下寸為法以人目

併岸高減去法按減法誤餘乘人矩端為實如法而一得

水閘陡岸測水圖按舊圖畫岸水視綠不能在術前今改正移於此

草曰置矩本去目下五寸為法以入目高五尺併岸高三丈得三丈五尺通為寸得三百五十寸減去五寸餘三百四十五寸乘沙除入矩端三十四寸得

一萬一千七百三十寸為實實如法五寸而一得二千三百四十六寸展為二十三丈四尺六寸為水闊

合問

按測望諸線皆合于人目之一點其高正當自人目計之今減去人目距矩自矩下計之不得其理矣

表望方城

問敵城不知廣遠傍城南山原林間房之林際有木二

株南北相去一百六十步遥與城東方面參相直乃于二水之東相對立兩表表間與木四方平人目以繩維之人自東後表向西行一十步望城東北隅入東前表一十五步又望城東南隅入東前表四十八步強半步里法三百六十欲知其方廣及相去幾何

答曰城東廣各一十二里三百二十步　城去木九里三百二十步

按答數皆誤今推得城方廣各一十一里二百

二十步又三十一分步之二十城東南隅至北木一里九十九步又三十一分步之一十二

術曰以勾股重差求之置城東南隅景入表減表間餘乘表間為城去木寔以西方步減城東北隅景入表餘為法按此句法誤得城去木數以城東北隅景入表減表間餘乘表間為廣實實如前法而一得城廣按此所得乃城東北隅至前木之遠以為城廣數誤也

表望方城圖按舊圖畫城南二木與城東西不城一直線在術前今改正移于此

草曰以西行一十步減東北隅入表一十五步餘五步為法以城東南隅景入表四十八步七分半減表間一百六十步餘一百一十一步二分半乘表間一表六十步得一萬七千八百為城去木寘以法五步除之按誤同上得三千五百六十步以里

法三百六十約之得九里三百二十步為城去木里及步數　次置城東北隅京十表一十五步減表間一百六十餘一百四十五步乘表間一百六十得二萬三千二百為減實以以前法五步除之得四千六百四十步以里法三百六十約之為一十二里三百二十步即城方廣里及步數按設亦同上　合問

按此題之要在二本與城東面成一直面方城與表木方形各邊俱平西行減城東南隅入表

之較與表閒成小勾股形城東南隅入表閒表閒之表與城東南隅至前木成大勾股形此二形同式可以相比故術草中第二求以城東北隅入表減表閒之餘求表閒為實以西行步減城東北隅入表之餘為法除實是也但所得為城東北隅至前木之遠以為城廣則誤矣又西行步減城東南隅入表之較與表閒成小勾股形城東南隅入表減表閒之較與城東南隅至

前木成大勾股形此二形亦同式可以相比以城東南隅入表減表間之餘乘表間為實應以西行步減城東南隅入表之為法除之即得城東南隅之前木之遠術草中以西行步減城東北隅入表之餘為法故得數大七倍餘既得城東面南北二隅距前木之遠則相減為城廣可知矣

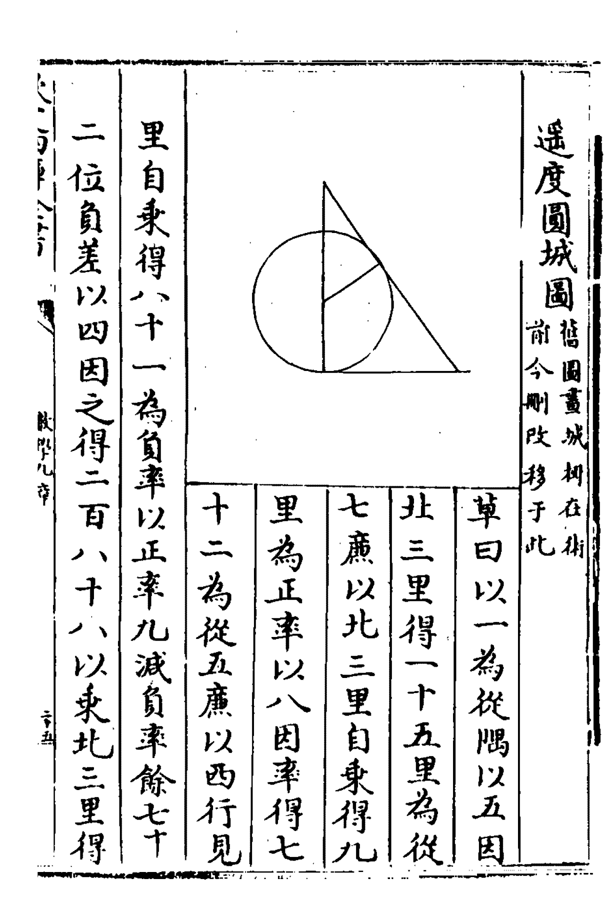
遥度城

問有圓城不知周徑四門中開北外三里有喬木出南門便折東門九里乃見木欲知城周徑各幾何圓用故法

答曰徑九里　周二十七里

術曰以勾股夕桀求之一為從隅五因北外里為從七廉置北里冪八因為從五廉以北里冪為正率以東行冪為負率二率差四乘北里為益從從三廉倍負率成五廉為益上廉以北里乘上廉為實開玲瓏九乘方得數自乘為徑以三因徑得周

遥度圓城圖舊圖畫城樹在術前今刪改移于此



草曰以一為從隅以五因北三里得一十五里為從七廉以北三里自乘得九里為正率以八因率得七十二為從五廉以西行見里自乘得八十一為負率以正率九減負率餘七十二位負差以四因之得二百八十八以乘北三里得

八百六十四係負差所乘者為益三廉倍負率八十一得一百六十二乘五廉七十二得一萬一千六百六十四為益上廉以北三里乘上廉得三萬四千九百九十二為實置實廉隅玲瓏空隅位方廉以約實衆法不可超進乃于實上定商三里其隅與商相生得三為從下廉又與商相生入從七廉共得二十四為星廉又與商相生得七十二為從六廉又與商相生入五　內共得二百八十八又與商相生得八百

六十四為從四廉又與商相生得二千五百九十二為正三廉內消益三廉八百六十四訖餘一千七百二十八為從三廉又與商相生得五千一百八十四為從二廉又與商相生得一萬五千五百八十二為從上廉內消益上廉一萬一千六百六十四訖餘三千八百八十八為正上廉又與商相生得一萬一千六百六十四為從方乃命上商三里除實適盡得三里以自乘之得九里為城圓徑之里數又以故法圓

率三因之得二十七為城周

| | | | |
|---|---|---|---|
| 𝍨 | 𝍯𝍡 | 𝍢 | 𝍠 |
| 𝍰𝍠 | 𝍨 | 𝍢 | 𝍤 |
| 𝍯𝍡 | 𝍨 | 𝍧 | 𝍢 |
| 𝍣 | 𝍰𝍠 | 𝍦 | 𝍩𝍣 |
| | | | |

以上求率圖以後開方圖實與益皆負畫黑商與從皆正畫朱

按商實負字旁書已明今皆用黑

○
𝍡𝍫𝍧𝍰𝍠
○
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍣
○
𝍧 𝍮𝍣
○
○
○
𝍩𝍣
○
𝍠

𝍢
𝍡𝍫𝍧𝍰𝍠
○
𝍩𝍥𝍮𝍣
○
𝍧 𝍮 𝍣
○
○
○
𝍩𝍣
𝍢
𝍠

𝍢
𝍡𝍫𝍧𝍰𝍠
○
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍣
○
𝍧 𝍮𝍣
○
○
○
𝍪 𝍣
𝍢
𝍠

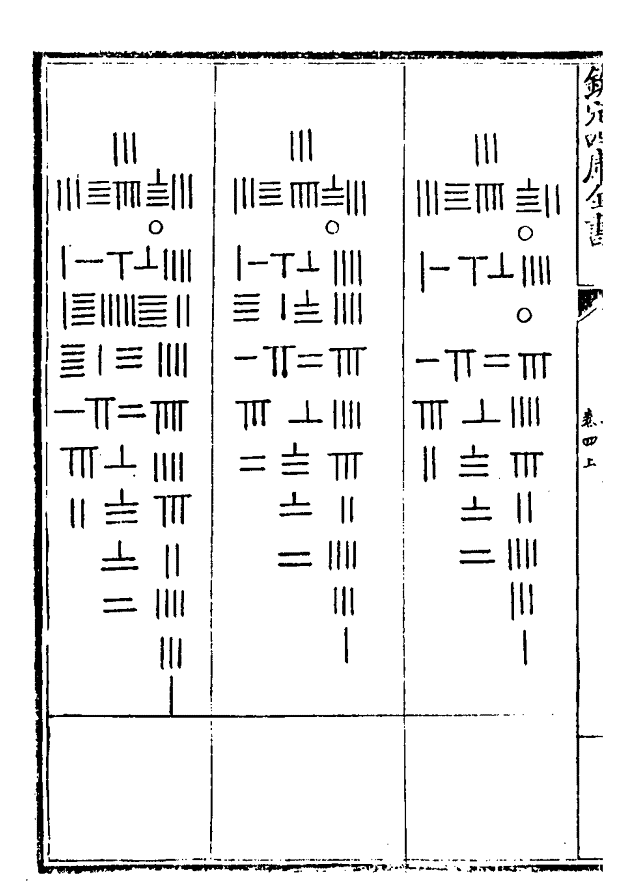
𝍢
𝍢𝍫𝍧𝍰𝍡
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍣
𝍧𝍮𝍣

𝍯𝍡
𝍪𝍣
𝍢
𝍠

𝍢
𝍢𝍫𝍧𝍫𝍠
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍣
𝍧𝍮𝍣
𝍡𝍧𝍰
𝍯𝍡
𝍪𝍣
𝍢
𝍠

𝍢
𝍢𝍫𝍧
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍡
𝍧𝍮𝍣
𝍧𝍮𝍣
𝍡𝍰𝍧
𝍯𝍡
𝍪𝍣
𝍢
𝍠

𝍢
𝍢𝍫𝍧𝍯𝍡
𝍠𝍩𝍥𝍮𝍣
𝍧𝍮𝍣
𝍪𝍣𝍰𝍡
𝍧𝍮𝍣
𝍡𝍰𝍧
𝍯𝍡
𝍪𝍣
𝍢
𝍠



按凡勾股難題用立天元一法取之多至三乘方而至元李冶測圓海鏡一百七十問僅一題

取至五乘方猶自以為煩此題非甚難者乃取
至九乘方蓋未得其要也細校術草中廉隅積
實之數與立天元一法自然相生者迥殊且凡
立天元一法開方後未有不得所求之數者今
得數自乘始為所之數尤于古人立法之意不
合爰另立取法並步算之式於後
法立天元一為圓城徑加三里得三里多一元
為大股自之得九里多六元多一平方為大股

羃九里為大勾自得之八十一里為大勾羃相併得九十里多六元多一年方為大弦羃又以大股為小勾弦和三里為小勾弦較和較相乘得九里多三元為小股羃二分天元之一為小勾加小勾三里得三里多二分元之一為小弦自得之九里多三元多四分平方之一為小弦羃乃以小羃與大股羃相乘得八十一里多八十一元多二十九平方又四分平方之一多四

立方又二分之一多四分三乘方之一寄之又以大弦羃與小股羃相乘得八百一十里多三百二十四元二十七平方三立方與寄數等兩邊各減八十一里三百二十四元二十七平方三立方得四分三乘方之一多一立方二平方又四分平方之一步二百四十三元與七百二十九里等各以四乘之得一三乘方多六立方九平方九百七十二元與二千九百一十六里

等乃以里數為實以元數為益方平方數為從上廉立方數為從下廉三乘方數為隅開帶縱三乘方得九里為城徑開方式附後

法列寔及方廉隅數約商九里乃以隅生商得九入下廉得一十五又以下廉生商得一百三十五入上廉得一百四十四又以商生上廉得一

千二百九十六以消益方得二百二十四爲從方以商生從方得二千九百一十六減實恰盡爲開得三乘方爲九里即城徑也

欽定四庫全書

子部

數學九章卷四下五上

詳校官欽天監博士臣古之雄

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官候補中允臣王燕緒

校對官編修臣孫希旦

謄錄監生臣張龍圻

數學九章卷四下

宋　秦九韶　撰

測望

望敵圓營

問敵臨河為圓營不知大小自河南岸至其地七里於其地立兩表相去二步其西表與敵營南北相直人退西表一十二步遥望東表適與敵營圓邊参合圓法用密率里法三百六十欲知其營周及徑各幾何

答曰營周六里一百二十步七分步之六　徑二里

按答數有誤營周係六里七十六步又一萬一千九百二十一分步之四千九百四十八徑係一里三百五十一步又一千七百零三分步之九百九十九

術曰以勾股夕桀求之置表間自乘為勾冪以退表自乘為股冪併二冪為弦冪置里通步自之乘勾冪為率自乘為泛實（按此數當即為實開帶從方今不開平方乃以此數自乘並以此數升他數開帶從三乘方不合）半弦冪乘率為泛從上廉（按半弦冪即半弦自乘又倍之之數）以勾冪減股冪餘

四約之按此即半勾半股各自乘相減之數自乘為泛益隅三泛可約之為定開連枝三乘玲瓏方得營徑以密率二千二乘七除為周

望敵圓營圖按舊圖在草後畫河水今刪改移於此



草曰置表間二步自乘得四為勾冪以退表一十二步自乘得一百四十四為股冪以勾股二冪併之得一百四十八為弦冪置七里以里法三百六十步通之得二千五百二十步自乘

得六百三十五萬四百乘勾冪四得二千五百四十萬一千六百為率以率自乘得六百四十五萬二千四百一十二億八千一百五十六萬為之實乃半弦冪得七十四乘率二千五百四十萬一千六百得一十八億七千九百七十一萬八千四百為泛從上廉以勾冪四減股冪一百四十四餘一百四十以四約之得三十五以自乘得一千二百二十五為泛益隅置三泛求等得一千二百二十五<sub>按即泛益隅</sub>俱以約之

得五千二百六十七億二千七百五十七萬七千六百為定實一百五十三萬四千四百六十四為從上廉一為定益隅開玲瓏三乘方乃以廉隅超二度約商置七百上廉為一百五十三億四千四百六十四益隅為一億乃以上商生隅得七億為益下廉又以上商生益廉減從廉餘一百四億四千四百六十四萬為從上廉又以上商生從廉得七百三十一億一千二百四十八萬為從方乃命上商除實實餘一百

四十九億四千二十一萬七千六百又以上商生益隅入下廉得一十四億為益下廉又以上商生益廉得益上廉減從廉餘六億四千四百六十四萬為上廉又以上商生上廉入方得七百七十六億二千四百九十六萬為方又以上商生益隅入下廉得二十一億又以上商生下廉為益上廉減從廉餘一百四十億五千五百三十六萬為益上廉又以上商生益隅入下廉得二十八億諸法皆退方一退為七十七億

六千二百四十九萬六千益上廉再退為一億四千五十五萬三千六百益下廉三退為二百八十萬益隅四退為一萬乃於上商之次續商置二十步以續商生隅入下廉為二百八十二萬又以續商生下廉入上廉為一億四千六百一十九萬三千六百又以續商生上廉減從方餘七十四億七千一十萬八十八百乃命續商除實適盡所得七百二十步以里法約之得二萬為營徑次以密率二十二乘七百二十

得一萬五千八百四十為實以七除之得二千二百六十二步七分步之六以里法約之得六里一百二步七分步之六為營周

表間 ||　表間 ||　勾冪 |||| 步　退表 一||　退表 一||　股冪 |☰|||| 步

勾冪 ||||　股冪 |☰||||　弦冪 |☰Ⅲ　里數 ⊤⊤　里法 |||⊥○ 步　得步 |☰||○

得　𝍪𝍣𝍪〇

得　𝍡𝍬𝍡〇

得冪　𝍥𝍬𝍣〇𝍣〇〇

𝍣

率　𝍪𝍣𝍬〇𝍩𝍥〇〇

率　𝍪𝍣𝍬〇𝍩𝍥〇〇

泛實　T彐||||⊢|||H⊥||三T〇〇〇〇

半弦冪　𝍮𝍣

率　𝍪𝍣𝍬〇𝍩𝍥〇〇

泛從廣　𝍩𝍧𝍯𝍧𝍯𝍠𝍰𝍢〇〇

句冪　𝍣

股冪　𝍠𝍬𝍣

餘

約法

得

得

泛益隅

置三泛求等得一千三百二十五以約三泛數

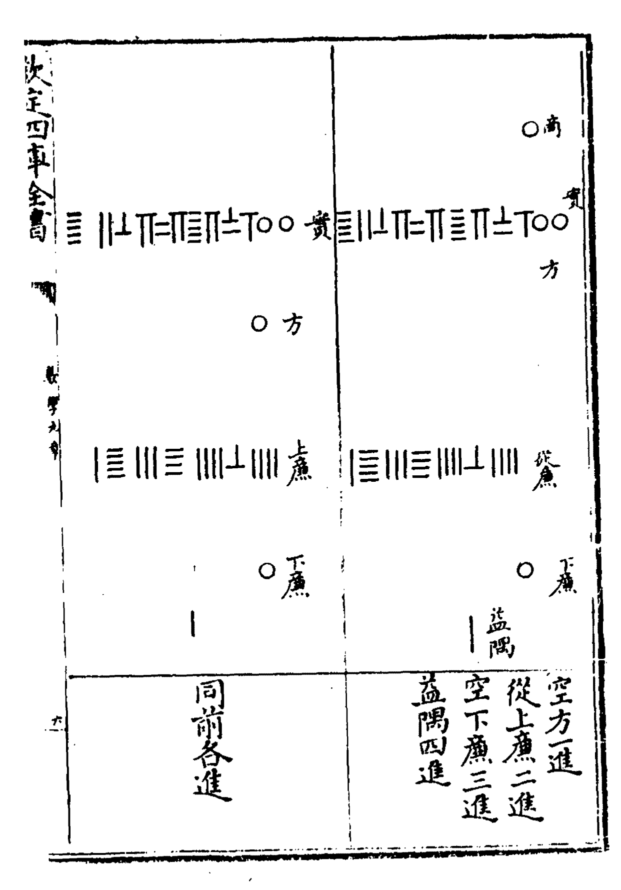
泛實步

泛從廉

泛益隅

等數

以等約三泛


商
實
方
從廉
下廉
益隅
空方一進
從上廉二進
空下廉三進
益隅四進
實
方
廉
下廉
同前各進

商
步
方
廉
下廉
益隅

約實置商七百步生隅得下廉

商
方
廉
下廉
隅

以商生下廉得益上廉

商

方

從上廉

益上廉

益下廉

隅

以益上廉消從上廉餘是從上廉

商

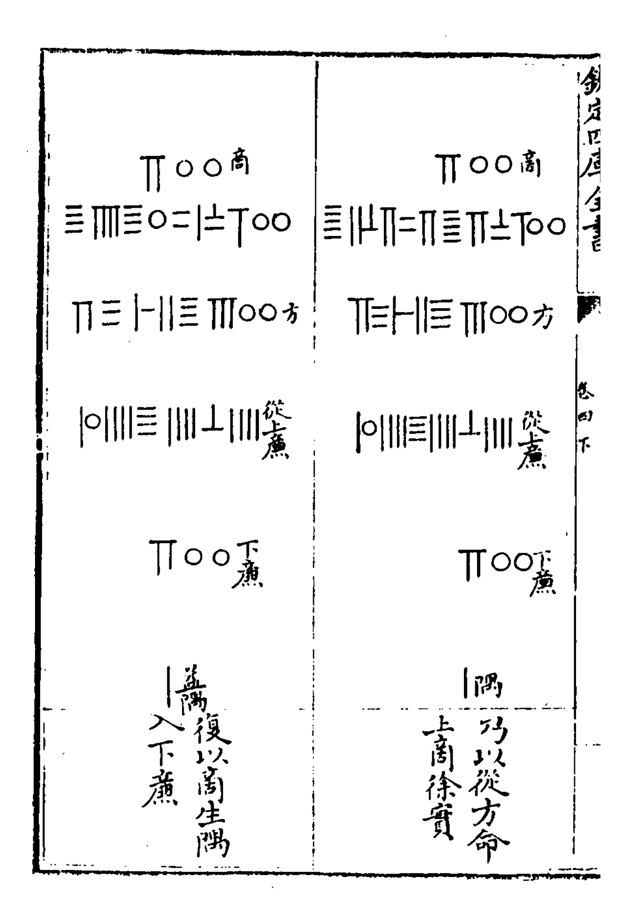
方

從上廉

下廉

隅

以商生上廉得從方


商
方
從上廉
下廉
隅
乃以從方命上商徐實
商
方
從上廉
下廉
益隅
復以商生隅入下廉

商 700

實 13430216600

方 72623400

從上廉 1043464

益上廉 840000

益下廉 1400

隅 1

以商生下廉得益上廉相消從上廉得上廉

商 700

實 13430216600

方 7312334

上廉 63464

下廉 1400

隅 1

以商生上廉入方得後方

商 𝍦〇〇

實 𝍰𝍣𝍫〇𝍪𝍯𝍥〇〇

方 𝍦𝍯𝍥𝍪𝍢𝍰𝍥

上廉 𝍥𝍫𝍣𝍮𝍢

下廉 𝍩𝍣〇〇

隅 𝍠

仍以商復生隅入下廉

商 𝍦〇〇

實 𝍰𝍣𝍫〇𝍪𝍯𝍥〇〇

方 𝍦𝍯𝍥𝍪𝍢𝍰𝍥〇〇

下廉 𝍥𝍫𝍣𝍮𝍢

下廉 𝍪𝍠〇〇

隅 𝍠

又以商生下廉得益上廉

商 𝍦〇〇

實 𝍠𝍫𝍧𝍱〇𝍪𝍠𝍮𝍥〇〇

方 𝍦𝍯𝍥𝍯𝍣𝍱𝍥〇〇

從上廉 𝍥𝍫𝍣𝍮𝍣

益上廉 𝍠𝍫𝍦〇〇〇〇

下廉 𝍪𝍠〇〇

隅 𝍠

上廉益從相消

商 𝍦〇〇

實 𝍠𝍫𝍧𝍫〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇〇

方 𝍦𝍯𝍥𝍪𝍣𝍱𝍥〇〇

益廉 𝍠𝍫〇𝍬𝍣𝍫𝍥

下廉 𝍪𝍠〇〇

隅 𝍠

還以商生隅入下廉

商　𝍦〇〇

實　𝍠𝍬𝍨𝍬〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇〇

方　𝍦𝍯𝍥𝍪𝍢𝍬𝍥〇〇

上廉　𝍠𝍫〇𝍬𝍣𝍫𝍥

下廉　𝍪𝍧〇〇

隅　𝍠

從方一退　上廉再退　下廉三退　益隅四退

商　𝍦𝍪〇

實　𝍠𝍬𝍨𝍬〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇〇

方　𝍯𝍦𝍮𝍡𝍫𝍧𝍮〇〇

上廉　𝍠𝍫〇𝍫𝍣𝍫𝍥

下廉　𝍡𝍯〇〇

隅　𝍠

續以商生隅入下廉

商 𝍦𝍪〇

實 𝍠𝍫𝍧𝍫〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇〇

方 𝍪𝍦𝍮𝍡𝍫𝍧𝍮〇〇

上廉 𝍠𝍫〇𝍬𝍣𝍫𝍥

下廉 𝍡𝍫𝍡〇

隅 𝍠

又以商生下廉入上廉

商 𝍦𝍪〇

實 𝍠𝍫𝍧𝍫〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇

方 𝍯𝍦𝍮𝍡𝍫𝍧𝍮〇〇

上廉 𝍠𝍫𝍥𝍩𝍧𝍫𝍥

下廉 𝍡𝍫𝍡〇

隅 𝍠

再以商生上廉消從方

商 𝍦𝍪〇

實 𝍠𝍫𝍧𝍫〇𝍪𝍠𝍯𝍥〇

方 𝍯𝍢𝍯〇𝍠〇𝍰𝍧〇

上廉 𝍠𝍫𝍥𝍩𝍧𝍫𝍥

下廉 𝍡𝍯𝍡〇

隅 𝍠

乃以從方命續商除實適盡

按此題用平方可矣術中所謂率者即平方實也乃復加自乘開三乘方徒為繁冗耳且乘從廉用半弦自乘之倍數乘隅數應用半股自乘之數今用勾股羃較四分之一即用半股羃半

勾冪之較比半股自乘數小一半勾自乘數故
得數較大若轉求表閒及退步必與原數不合
試以相去七里為大勾弦和營徑三里為倍大
勾相減得五里為大勾弦較和相乘得較三十
五為大股冪大勾弦里自之仍得一為大勾冪
置小勾冪四步以大股冪乘之得百百四十步
以大勾冪除之仍得一百四十步為小股冪比
原小股冪少四步其術之疎可知矣設用平方

法如左

法立天元一為營徑相去七里通為二千五百二十步為大勾弦和相減得二千五百二十步少一元為大勾弦較和較相乘得六百三十五萬零四百步二千五百二十元為大少股冪天元一半之以減相去步得二千五百二十步少二分天元之一為大弦自之得六百三十五萬零四百步少二千五百二十元多四分平方之

一為大弦冪退步十二為小股自之得一百四十四步為小股冪表間二步為小勾自之得四步為小勾冪相併得一百四十八步為小弦冪以小弦冪乘大股冪得九億三千九百八十五萬九千二百步少三十七萬二千九百六十元寄之又以小股冪乘大弦冪得九億一千四百四十五萬七千六百步少三十六萬二千八百八十元多三十六平方與寄數為相等兩邊各

減九億一千四百四十五萬七千六百步各加三十七萬二千九百六十元得二千五百四十萬零一千六百步即術中率數與三十六平方多一萬零八十元等三數求總等得三十六約步數得七十萬零五千六百為長方積為實約元數得二百八十為從方為長闊較約平方數得爲為隅用帶從平方法開得闊七百一十一步又一千七百零三分步之九百九十九為營徑步以

密率用二十二乘之徑七除之得二千二百三十六步又一萬一千九百二十一分步之四千九百四十八為營周步各以里率收之得營周六里七十六步又一萬一千九百二十一分步之四千九百四十八營徑一里三百五十一步又一千七百零三分步之九百九十九還原之法置營徑步數通分納子得一二一一八三二分為倍大勾分數又以分母通相去步得四二

九一五六分為大勾弦和分數二數相減餘

三七九七二八分為大勾弦較分數和較分

數相乘得一三二一六八三七四五九六八

分為大股冪分倍大勾分折半得六五九一

六自之得三六七一三四一九九五六分

為大勾冪分及以小勾冪四步乘大股冪分得

五二八六七三四九九八二七二分以大勾冪

分除之得一百四十四步為小股冪與原數合

此猶用兩表相去步也若細較之當用人目相去步則營周當多十二步餘營徑當多四步不足也

望知敵衆

問敵為圓營在水北平沙不知人數諜稱彼營布卒占地方八尺我軍在水南山原於下立表髙八丈與原山腰等平自表端引繩虛量平至人足三十步人立其處望彼營北陵與表端參合又望營南陵入表端

八尺人目高四尺八寸以圓密率入重差求敵衆合得幾何

答曰敵衆八百四十九人

按數不合應二百七十三人其故詳草後

術曰以勾股乘之置人退表步按此條誤法應置表為乘入表為實以人目高為法除之得徑以密周率乘徑得數為實以密徑率因人立為法約之得外周人數餘收為一副置加六以乘副得數為實如一十二而一餘

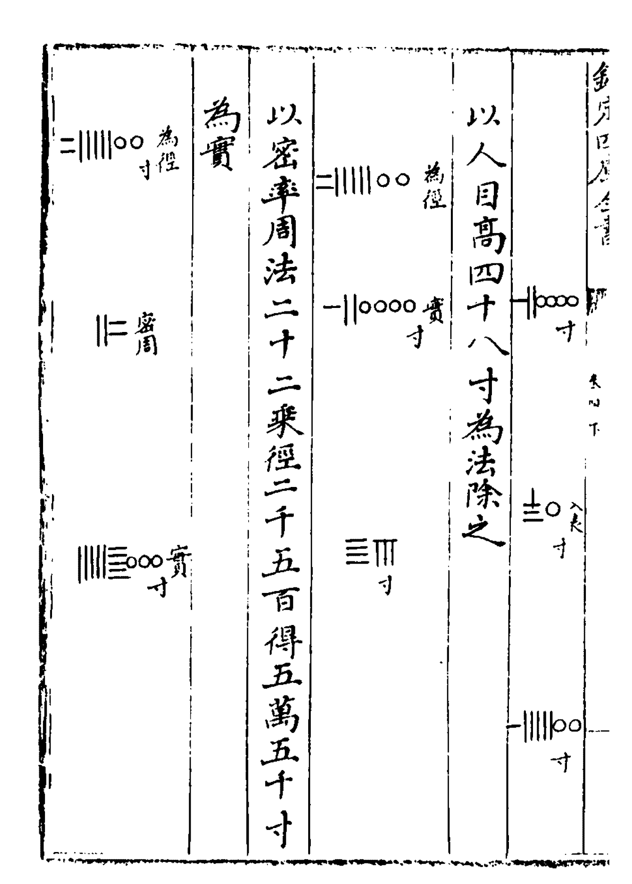
亦收為全

望知敵衆圖

按舊圖畫山水在術前今刪從移於此



草曰置人立退表三十步以步法五尺展為五十寸通之得一千五百寸乘入表八尺得一十二萬寸為實



寸

入表寸

寸

以人目高四十八寸為法除之

為徑

實寸

寸

以密率周法二十二乘徑二千五百得五萬五千寸

為實

為徑寸

密周

實寸

以密率徑法七因謀稱人立八尺得五百六十為法

密徑法 ㄒ

立 〇≟

法寸 〇丄≡

商 〇

實寸 〇〇〇≡||||

法寸 〇丄|||||

以法五百六十寸約實五萬五千寸得九十八人

為外周人數不盡一百二十寸棄之

外周 Ⅲ≟

棄余寸

不盡 |二

法 丄|||||

副置外周九十八人加六得一百四人乘副為實

副 𝍱𝍧

正 𝍱𝍧

圓差 𝍥 人

得 𝍠〇𝍣

商 〇

實 𝍠〇𝍠𝍱𝍡 人

法 𝍩𝍡

以十二為法

商 〇〇

實 𝍠〇𝍠𝍱𝍡

法 𝍠𝍪

以法退一步

商 〇〇𝍧

實 ‖☰|〇|

法 —‖

法進二商八百

實 ‖丄|

法 |═

法退商四十

人敵衆 𝍧𝍧☰𝍧

棄數 ‖‖ 不盡

法 —‖

得八百四十九為敵衆不盡棄之

按此術應置表高加人目高以入表棄之誤置退步以入表乘之故人數差多二倍蓋思省偶

未至耳至求人數先用密率次用束箭法亦未盡合題問今依其數各歩於後

求營徑置表高八丈加人目高四尺八寸得八丈四尺八寸以入表八尺乘之得六萬七千八百四十寸以人目高除之得一千四丈一尺三寸又三分寸之一為營徑葢以表高加人目高為大股營徑為大勾較人目高為小股入表為小勾較置大股以小勾較乘之以小股除之即

得大勾較也

求人數用密率置徑為實倍每人占地八尺得一十六尺為法除實得八為外層數加最内一層得九為共層數餘一十三尺三寸又三分寸之一為最内徑以最内徑與最外徑相加即皆徑以九層乘之折半得六百九十六尺為九層共徑數以密周率二十二乘之得一萬五千三百一十二尺為實以密率七乘每人占地八尺得

五十六尺為法除之得二百七十三人餘三尺又七分尺之三棄之此法應先求得内外圓周再求九層共周數今先求九層共徑數然後變為圓周其理一也

望敵遠近

問敵軍處北山下原不知相去遠近乃於平地立一表高四尺人退表九百步步法五尺遥望山原適與表端參合人目高四尺八欲之敵軍相去幾何

答曰一十二里半

術曰以勾股求之重差入之置人目高以表高減之餘為法置退表乘表高為實實如法而一

望敵遠近圖



草曰置人目高四尺八寸減表高四尺餘八寸為法置退表九百步以步五十寸通之得四萬五千寸乘表高四十寸得一百八十萬寸為實如法八寸而一

得二十二萬五千寸以步法五十寸約之得四千五百步為相去步以里法三百六十步約之得一十二里半為敵去表所合問

表望浮圖

問有浮圖欹側欲換塔心木不知其高去塔六丈有剎竿亦不知其高竿本去地九尺二寸始釘鍋（湯鍋原本作鍚今改正）一十四枚枚長五寸每鍋下股相去二尺五寸就竿為表人退竿三丈遥望浮圖尖適與竿端斜

合又望相輪之本影鍋第七枚上股人目入去地四尺八寸心木放三尺為準按準原本作埴今改正卯剪截欲求塔高輪高合用塔心木長各幾何

答曰塔高一十一丈七尺　相輪高三丈　塔身高八丈七尺　竿高四丈二尺二寸　塔心木九丈内三尺為剪截穿鑿準卯

按塔高竿高二數合相輪高塔身高塔心木長三數俱誤相輪高四丈五尺塔身高七丈二尺

塔心木長七丈五尺說詳草後

術曰以勾股求之重差入之置鍋數減一餘乘鍋相去數併一枚長數加竿本共為表竿高以退表為法以人目高減表竿高餘乘竿去塔為實實如法而一得數加表竿高共為塔高置相輪入本鍋數減一餘乘鍋相去又乘竿去塔為實實如法而一得相輪高按未加入鍋人數法誤以減塔高餘為塔身高以益準卯尺數為塔心木長

表望浮圖圖 按舊圖畫盡塔形在術前今删改移於此



草曰置鍋一十四枚減一餘一十三以乘鍋相去二尺五寸得三百二十五寸併最上鍋一枚長五寸得三百三十寸又加竿本九尺二寸共得四百二十二尺為表竿高以人退表三丈通為三百寸為

法次以人目高四尺八寸減表竿高四百二十二寸餘三百七千四寸以乘竿去塔六丈得二十二萬四千四百寸為實實如法三百兩一得七百四十八寸加表竿高四百二十二寸得一千一百七十寸以十約之為一十一丈七尺為塔高置相輪本入第七鍋減一餘六以乘鍋相去二尺五寸得一百五十寸又乘竿去塔六丈得九萬寸為實實如前法三百寸而一得三百寸約為三丈得相輪高按不加入鍋即以為相輪高誤

相輪高三丈減塔高一十一丈七尺餘八丈七尺為塔身高按此數及塔心木數皆因上數而誤益三尺為翦截舉卯共得九丈為塔心木長合前問

按此皆大小形同式相求法也人目去塔為總勾人目上塔尖高塔身皆為總股高相輪高為總股較人目去竿為分小勾人目上竿高及相輪本入竿高俱為分小股相輪本入竿為小股較竿去塔為分大勾術以竿去塔分大勾與小

勾股乘除得大股數加小股為總股故塔尖高數合以大勾與小勾小股較乘除得大股較數即為總股較故相輪高數少一小股較一丈五尺也塔身高塔心木長皆本此數加減而得故誤數相等